

während bei Normalleitern bekanntlich eine solche Darstellung nicht existiert. Doch soll auf die genauere Verfolgung dieser Zusammenhänge verzichtet werden.

Die Existenz elektrischer Felder in Supraleitern müßte sich im Prinzip indirekt experimentell verifizieren lassen, wenn man etwa einen supraleitenden Ring aus homogenem Material an einer Stelle durchschneidet, die beiden Enden auf verschie-

dene Temperatur bringt und nun im Raum zwischen den Enden (ohne Berührung mit den Metallflächen) das elektrische Feld mißt. Der störende Einfluß der Oberflächen-Potentialdifferenzen sollte hier zum mindesten in erster Näherung wegfallen, so daß die wahre Potentialdifferenz zwischen den beiden auf verschiedener Temperatur befindlichen Enden gemessen werden könnte.

Über den Zusammenhang der Eigenwerte der Heisenbergschen S-Matrix mit den stationären Zuständen

Von JOSEF MEIXNER

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Aachen
(Z. Naturforsch. 3a, 75–78 [1948]; eingegangen am 17. November 1947)

Für den von Kramers und Heisenberg gefundenen Zusammenhang zwischen den Eigenfunktionen des kontinuierlichen und des diskreten Spektrums eines wellenmechanischen Eigenwertproblems wird ein neuer Beweis gegeben, der auf dem Entwicklungssatz und auf den Eigenschaften der Greenschen Funktion beruht.

Heisenberg¹ hat in der Quantentheorie der Wellenfelder eine Streumatrix (S-Matrix genannt) eingeführt, aus der sich die Wirkungsquerschnitte bzw. das asymptotische Verhalten der Wellenfunktionen für Stoßprozesse einerseits, die diskreten Energieeigenwerte des abgeschlossenen Systems andererseits gewinnen lassen. Als Ersatz der Hamilton-Funktion gedacht bei Systemen, für welche keine oder keine einfache Hamilton-Funktion existiert, hat sie natürlich auch einen Sinn für Systeme, bei denen man eine solche angeben kann. In den letzteren Fällen läßt sich beweisen, daß man aus der S-Matrix, oder, was damit gleichwertig ist, aus den Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums durch den Vorgang der analytischen Fortsetzung Eigenwerte und Eigenfunktionen des diskreten Spektrums erhalten kann. Dieser Beweis wurde von Heisenberg, auf eine mündliche Mitteilung von H. A. Kramers (1942) zurückgehend, am speziellen Beispiel eines einzigen Teilchens in einem zentralen Kraftfeld, das durch eine dreidimensionale Schrödinger-Gleichung beschrieben wird, ausführlich auseinandergesetzt.

¹ W. Heisenberg, Z. Naturforsch. 1, 608 [1946].

² J. Meixner, Math. Z. 36, 677 [1933].

³ J. Meixner, Z. Physik 90, 312 [1934].

Dieser Zusammenhang zwischen kontinuierlichem und diskretem Spektrum wurde vom Verfasser bereits in seiner von Sommerfeld angeregten Dissertation² an der Schrödinger-Gleichung mit Coulomb-Potential bemerkt, an der Dirac-Gleichung bestätigt³ und im Anhang einer weiteren Arbeit⁴ bei allgemeineren Potentialen formuliert und angewandt.

Es ist das Ziel der folgenden Ausführungen, einen Beweis dieses Zusammenhanges zu geben, der in seiner Methode in den erwähnten Arbeiten vorgezeichnet ist. Er unterscheidet sich vom Heisenberg-Kramerschen Beweis darin, daß nicht die Vollständigkeitsrelation, sondern der Entwicklungssatz nach den Eigenfunktionen des diskreten und kontinuierlichen Spektrums zugrunde gelegt wird. Der folgende Beweis dieses wichtigen Problems beleuchtet damit die Verhältnisse von einer etwas anderen Seite, insbesondere nimmt in ihm die Greensche Funktion die Stellung ein, welche ihr auf Grund ihrer von Sommerfeld^{5,6} stets unterstrichenen, aber sonst wenig beachteten physikalischen Bedeutung bei

⁴ J. Meixner, Ann. Physik (5) 29, 97 [1937].

⁵ A. Sommerfeld, Jber. Dtsch. Math.-Ver. 21, 309 [1913].

⁶ A. Sommerfeld, Partielle Differentialgleichungen der Physik. Leipzig 1947.



wellenmechanischen Stoßproblemen zukommt. In mathematischer Hinsicht befriedigt dieser Beweis vielleicht mehr, weil die δ -Funktion in ihm nicht explizit eingeht.

1. Vorbereitungen. Wir betrachten die eindimensionale Schrödingersche Wellengleichung

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = V(x) \cdot \psi \quad (1)$$

im Intervall $0 \leq x < \infty$. k = Wellenzahl, $V(x)$ = potentielle Energie in geeigneten Einheiten; sie verschwinde für $x \rightarrow \infty$ hinreichend stark. Zur Gl. (1) gebe es ein kontinuierliches Spektrum, welches alle Werte von k zwischen 0 und ∞ umfaßt, ferner ein diskretes Spektrum mit den rein imaginären Eigenwerten $k = \pm k_1, \pm k_2, \dots$ (entspr. negativen Eigenwerten der Energie), wobei wir etwa die Randbedingungen $\psi = 0$ für $x = 0$ und $\psi = \text{endlich}$ für $x \rightarrow \infty$ voraussetzen.

Jede Eigenfunktion des kontinuierlichen Spektrums $\psi(k, x)$ läßt sich aus einer einlaufenden Welle $f(k, x)$ und einer reflektierten Welle $-S(k) f(-k, x)$ zusammensetzen, wobei die erstere durch das asymptotische Verhalten

$$f(k, x) \sim e^{-ikx} \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad (2)$$

definiert ist (bei geeigneter Wahl des Zeitfaktors in der Wellenfunktion). Für $S(k)$ können wir zufolge unserer Randbedingung bei $x = 0$ schreiben $f(k)/f(-k)$, wobei zur Abkürzung $f(\pm k, 0) = f(\pm k)$ gesetzt ist; ferner fügen wir einen Faktor $(2\pi)^{-1/2}$ bei, um die Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums in der k -Skala zu normieren. Dann wird

$$\psi(k, x) = (2\pi)^{-1/2} \left[f(k, x) - \frac{f(k)}{f(-k)} f(-k, x) \right], \quad (3)$$

wobei $f(-k)$ stets von Null verschieden ist.

Die Amplitude $S(k)$ der reflektierten Welle entspricht in der allgemeinen Theorie von Heisenberg einem Eigenwert der S-Matrix.

Wegen der Reellität der Differentialgl. (1) ist

$$f(k, x)^* = f(-k, x) \quad (4)$$

und daher $f(k)^* = f(-k)$ und somit $S(k)S(k)^* = 1$, wenn der Stern die Bildung des konjugiert komplexen Ausdrucks bedeutet. Schließlich ist

$$\psi(-k, x) = -\frac{f(-k)}{f(k)} \psi(k, x). \quad (5)$$

Für die Eigenfunktionen des diskreten Spektrums schreiben wir $\psi_n(x)$; sie seien so normiert, daß

$$\int_0^\infty \psi_n(x) \psi_m(x)^* dx = \delta_{nm}. \quad (6)$$

Wesentlich für das Folgende ist die Bemerkung, daß $f(k, x)$ nicht nur für reelle k einen Sinn hat, sondern als Funktion von k in der ganzen komplexen k -Ebene analytisch fortgesetzt werden kann. Ist $V(x) = 0$ für $x > x_0$ (sog. abgeschnittenes Potential), so ergibt sich, wie Jost⁷ ausführlich auseinandergesetzt hat, daß für alle x

$$f(k, x) = \text{regulär in } k \text{ mit einfachen Nullstellen für } k \neq 0. \quad (7)$$

Die Funktion $S(k)$ hat also einfache Pole dort, wo $f(-k)$ verschwindet. Wegen $S(k)S(-k) = 1$ entspricht jedem Pol von $S(k)$ in der positiv imaginären Halbebene eine Nullstelle in der negativ imaginären Halbebene, weshalb man auch häufig von den Nullstellen von $S(k)$ für $\text{Im } k < 0$ statt von den Polen für $\text{Im } k > 0$ spricht.

Für große Absolutwerte von k gilt asymptotisch

$$f(k, x) \sim e^{-ikx}. \quad (8)$$

Für nicht „abgeschnittene“ Potentiale kann statt (7) nur behauptet werden, daß für $\text{Im } k > 0$

$$\begin{aligned} f(-k, x) &= \text{regulär in } k \text{ mit einfachen Nullstellen für } k \neq 0, \\ f(k, x) &= \text{regulär in } k \text{ abgesehen von Unendlichkeitsstellen,} \end{aligned} \quad (9)$$

$\psi(k, x) \cdot f(-k) = \text{ganz transzendent in } k$
und nicht identisch Null.

Die asymptotische Darstellung (8) gilt nunmehr nur für $\text{Im } k > 0$. $S(k)$ hat also weitere Unendlichkeitsstellen, falls $f(k)$ solche hat. Man bezeichnet sie als falsche Unendlichkeitsstellen, die entsprechenden Nullstellen in der Halbebene. Im $k < 0$ als falsche Nullstellen. Ihr Auftreten hat zuerst Ma⁸ bemerkt. — Wir nehmen im folgenden der Einfachheit halber an, daß keine Unendlichkeitsstelle von $f(k)$ mit einer Nullstelle von $f(-k)$ zusammenfällt.

⁷ R. Jost, im Druck.

⁸ S. T. Ma, Physic. Rev. **71**, 195 [1947].

2. Die Methode der Greenschen Funktion. Unser Beweis des fraglichen Zusammenhangs zwischen kontinuierlichem und diskretem Spektrum beruht nun darauf, daß man die Greensche Funktion einmal als Lösung der Schrödinger-Gleichung definieren kann, welche die gegebene Randbedingung bei $x = 0$ und die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung für $x \rightarrow \infty$ erfüllt und welche überall stetig ist, während ihre Ableitung an der Stelle $x = y$ um $+1$ springt, und daß man sie andererseits nach dem Entwicklungssatz durch die Eigenfunktionen des kontinuierlichen und des diskreten Spektrums darstellen kann. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke für die Greensche Funktion ergibt sich fast unmittelbar der gesuchte Zusammenhang.

Diese beiden Darstellungen der Greenschen Funktion lauten für $0 < k < \infty$

$$G(k; x, y) = (2\pi)^{1/2} \cdot \frac{1}{2ik} \begin{cases} \psi(k, x) f(-k, y) & \text{für } x \leq y, \\ f(-k, x) \psi(k, y) & \text{für } x \geq y \end{cases} \quad (10)$$

und

$$G(k; x, y) = \int_0^\infty \frac{\psi(q, x) \psi(q, y)^*}{k^2 - q^2} dq + \sum_n \frac{\psi_n(x) \psi_n(y)^*}{k^2 - k_n^2}. \quad (10a)$$

Der Integrationsweg in (10a) weicht bei $q = k$ in die negativ imaginäre Halbebene aus, wie es die Ausstrahlungsbedingung von Sommerfeld verlangt. Für komplexe k haben wir unter $\psi(k, y)^*$ usw. nicht wie bei reellem k die konjugiert komplexen Ausdrücke zu $\psi(k, y)$ usw., sondern die analytische Fortsetzung der für reelle k definierten Funktionen $\psi(k, y)$ usw. zu verstehen; doch bleiben natürlich Beziehungen wie (4) erhalten.

Wir setzen für das Folgende $x < y$ voraus. Für $x > y$ würde eine entsprechende Rechnung dasselbe Ergebnis liefern. Wir zerlegen $\psi(q, y)^*$ in (10a) nach (3) in zwei Summanden und ziehen zunächst den Integrationsweg für den ersten Summanden über den singulären Punkt $q = k$ weg. Dabei entsteht als Residuum gerade der Ausdruck (10) für $G(k; x, y)$. Die verbleibenden Integrale über die beiden Anteile obiger Zerlegung müssen sich also gegen den Beitrag des diskreten Spektrums in (10a) wegheben. Die so entstandene Beziehung formen wir noch etwas um.

Im Integral über den zweiten Summanden er-

setzen wir q durch $-q$: der Integrand stimmt dann wegen (5) mit dem Integranden des ersten Summanden überein. Die beiden Integrale lassen sich daher zu einem einzigen zusammenfassen, dessen Integrationsweg \mathcal{C} von $-\infty$ nach $+\infty$ geht und bei den beiden singulären Punkten $q = \pm k$ in die positiv imaginäre Halbebene ausweicht. Es gilt also für $x \leq y$

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty \mathcal{C}}^\infty \frac{\psi(q, x) f(-q, y)}{k^2 - q^2} dq = - \sum_n \frac{\psi_n(x) \psi_n(y)^*}{k^2 - k_n^2}. \quad (11)$$

Für „abgeschnittene“ Potentiale verschwindet der Integrand wegen $x < y$ für $\text{Im } k > 0$ wegen (8) exponentiell, und daher läßt sich der Integrationsweg \mathcal{C} durch den Weg von $+\infty$ nach $-\infty$ im Unendlichen der positiv imaginären Halbebene schließen. Dasselbe scheint für nicht-abgeschnittene Potentiale der Fall zu sein, obwohl dann für großen positiven Imaginärteil von k nicht mehr die asymptotische Darstellung (8) gilt, vielmehr treten dann Faktoren zur Exponentialfunktion in (8), die an den Unendlichkeitsstellen von $f(k)$ singulär sind.

Innerhalb des Integrationsweges hat der Integrand, als Funktion von q betrachtet, nur dort einfache Pole, wo $f(-q)$ verschwindet; denn $\psi(q, x) f(-q)$ und $f(-q, y)$ sind für $\text{Im } q > 0$ nach (9) reguläre Funktionen von q . Die falschen Unendlichkeitsstellen von $S(q)$ geben daher keine Singularitäten des Integranden für $\text{Im } q > 0$. Der Integrationsweg läßt sich auf die Pole von $f(-q)^{-1}$ in der positiv imaginären Halbebene zusammenziehen. Das Integral in (11) muß eine Partialbruchreihe mit den Nennern $k^2 - k_n^2$ liefern; d. h. die Pole von $f(-q)^{-1}$ fallen mit den diskreten Eigenwerten zusammen, und es gilt

$$(2\pi)^{1/2} \psi_n(x) \psi_n(y)^* = - \oint_{k_n} \psi(q, x) f(-q, y) dq, \quad (12)$$

oder auch, wenn wir für $\psi(q, x)$ den Ausdruck (3) einsetzen,

$$\begin{aligned} 2\pi \psi_n(x) \psi_n(y)^* &= f(-k_n, x) f(-k_n, y) f(k_n) \oint_{k_n} f(-q)^{-1} dq \\ &= f(-k_n, x) f(-k_n, y) \oint_{k_n} S(q) dq. \end{aligned} \quad (13)$$

Für große x, y ergibt sich

$$2 \pi \psi_n(x) \psi_n(y)^* \sim e^{-|k_n|(x+y)} \oint_{k_n} S(\varrho) d\varrho, \quad (14)$$

woraus der Normierungsfaktor im diskreten Spektrum entnommen werden kann.

3. Ergänzende Bemerkungen. Im dreidimensionalen Fall läßt sich die Darstellung (10a) der Greenschen Funktion unter Berücksichtigung einer eventuellen Entartung der Eigenwerte unmittelbar übernehmen. Die (9) entsprechende Darstellung läßt sich zwar allgemein nicht explizit angeben, doch ist es hier möglich, und das genügt für unsere Zwecke, eine solche Darstellung zu finden, wenn der Quellpunkt Q sich in großer Entfernung befindet. Ist überdies der Aufpunkt P weit vom Streuzentrum entfernt, jedoch so, daß noch $r_p \ll r_Q$ bleibt, so lautet sie

$$G(k; P, Q) \sim \frac{e^{ikr_Q}}{-4\pi r_Q} \left[e^{-ikz_P} + S(k; \vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr_P}}{r_P} \right], \quad (15)$$

r_P, ϑ, φ sind Polarkoordinaten des Aufpunktes P ; r_Q = Entfernung des Quellpunktes vom Koordinatenanfangspunkt. Der Quellpunkt ist auf der positiven z -Achse angenommen.

Der Klammerfaktor in (15) ist eine Überlagerung einer vom Quellpunkt ausgehenden ebenen Welle und einer vom Streuzentrum gestreuten Kugelwelle. Letztere läßt sich in Partialwellen zerlegen

$$S(k; \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l S_{lm}(k) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}. \quad (16)$$

Die Greensche Funktion löst also das Streuproblem für eine aus einem Quellpunkt Q kommende Teilchenwelle an einem Streufeld. Die gestreute Intensität im Vergleich zur einfallenden wird für entfernte Q durch $|S(k; \vartheta, \varphi)|^2 \cdot r_P^{-2}$ gegeben. Darüber hinaus enthält die Greensche Funktion unter den Unendlichkeitsstellen der Funktion S oder der Koeffizienten S_{lm} , als analytische Funktionen von k betrachtet, die Eigenwerte des diskreten Spektrums. Es gelten analoge Beziehungen zu (12), (13), (14).

Damit enthält die Greensche Funktion bei großer Entfernung von P und Q vom Streuzentrum (mit $r_p \ll r_Q$) dieselben Informationen wie die Streufunktion $S(k; \vartheta, \varphi)$ bzw. wie die Koeffizienten $S_{lm}(k)$ und ist ihr damit gleichwertig.

Im Falle des Coulomb-Potentials ist das asymptotische Verhalten der Wellenfunktionen etwas anders als in (2) bzw. in (15) angegeben, doch lassen sich die obigen Überlegungen für diesen Fall leicht modifizieren. Im übrigen können hier die Aussagen (12), (13), (14) direkt nachgeprüft werden. Das wurde in ^{2,3} für die Schrödinger- und für die Dirac-Gleichung durchgeführt.

Verwickelter sind die Verhältnisse bei Mehrteilchenproblemen, insbesondere hinsichtlich der anschaulichen Deutung des Zusammenhanges der Greenschen Funktion mit dem allgemeinen Stoßproblem. Hierauf kann vielleicht später eingegangen werden.

Hrn. Prof. A. Sommerfeld und Hrn. Prof. W. Heisenberg danke ich für ihr Interesse an dieser Untersuchung, Hrn. Dr. Res Jost (Zürich) dafür, daß er mir seine Arbeit vor ihrer Veröffentlichung zugänglich machte.

Theorie der Streuung schneller geladener Teilchen II Mehrfach- und Vielfachstreuung ¹

VON GERT MOLIÈRE

Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik, Hechingen
(Z. Naturforschg. **3a**, 78–97 [1948]; eingegangen am 8. Oktober 1947)

Die Theorie der inkohärenten Mehrfach- und Vielfachstreuung zu (absolut) kleinen Winkeln wird neu entwickelt. Gegenüber den bisherigen Theorien, auf deren Methoden z. Tl. aufgebaut wird, werden folgende Fortschritte erzielt:

1. Es wird das in Tl. I abgeleitete, für beliebige Werte von $\alpha = zZ/(137\beta)$ gültige Einzelstreugesetz zugrunde gelegt.

¹ Habilitationsschrift Tübingen 1947.